

Analisis Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Persamaan Schrödinger Potensial Non-Sentral *Shape Invariance* q-Deformasi Menggunakan Metode Nikiforov-Uvarov

Hadma Yuliani^{1,*}, A. Suparmi², C. Cari²

¹*Program Studi Tadris Fisika, Institut Agama Islam Negeri Palangka Raya
Jl. G. Obos, Palangka Raya 74874*

²*Program Studi Ilmu Fisika, Program Pascasarjana, Universitas Sebelas Maret
Jl. Ir. Sutami, Surakarta 57126*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan spektrum energi dan fungsi gelombang beberapa potensial non-sentral *shape invariance* q-deformasi, yaitu potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (NU). Penelitian ini merupakan studi literatur untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger potensial terdeformasi Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse dengan q-deformasi secara analitik. Spektrum energi dan fungsi gelombang suatu sistem partikel dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan Schrödinger. Spektrum energi dan fungsi gelombang potensial non-sentral diperoleh dengan menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Persamaan Schrödinger untuk potensial non-sentral q-deformasi secara umum dapat diselesaikan secara eksak bila variabel potensialnya terpisahkan ke bagian radial dan sudut. Spektrum energi untuk potensial ini telah diturunkan secara analitis. Spektrum energi dan fungsi gelombang radial yang diperoleh hanya bersifat pendekatan karena adanya faktor sentrifugal, sedangkan fungsi gelombang bagian sudut dan bilangan kuantum orbital diperoleh dari persamaan Schrödinger bagian sudut.

© 2016 Penulis. Diterbitkan oleh Pendidikan Fisika UHAMKA

Kata kunci: Spektrum energi, fungsi gelombang, persamaan Schrödinger, non-sentral q-deformasi, metode Nikiforov-Uvarov

*Penulis koresponden. Alamat email: hadmayuliani@gmail.com

Pendahuluan

Persamaan Schrödinger digunakan untuk mendeskripsikan gerak elektron relatif terhadap proton sehingga energi potensial sistem adalah energi potensial elektron yang terikat terhadap inti. Elektron mengorbit inti pada kulit yang berbentuk bola maka fungsi gelombang dan tingkat-tingkat energi elektron ditentukan berdasarkan penyelesaian Schrödinger untuk atom dapat digunakan untuk menjelaskan teori atom menurut Bohr dan sebagian dasar teori atom secara umum [1].

Berbagai metode penyelesaian persamaan Schrödinger untuk gerak partikel bermuatan pada potensial-potensial sentral dan non-sentral de-

ngan suatu potensial vektor atau suatu potensial skalar terpisahkan telah dikembangkan [2]. Berbagai metode yang telah dikembangkan tersebut diantaranya adalah metode Supersymmetry [3-4], metode Nikiforov-Uvarov (NU) [5-6], dan Polinomial Romanovski [7-8].

Penyelesaian persamaan Schrödinger untuk atom hidrogen dan potensial *shape invariance* menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Metode Nikiforov-Uvarov (NU) adalah metode yang dikembangkan oleh Nikiforov-Uvarov. Metode NU dikembangkan berdasarkan penyelesaian persamaan diferensial orde dua dengan menggunakan persamaan hipergeometri. Metode NU dapat digu-

nakan untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger untuk potensial non-sentral [9].

Persamaan Schrödinger untuk potensial sentral telah banyak didiskusikan dalam buku MK seperti potensial Coulomb, Morse, potensial harmonik osilator tiga dimensi, Hulthen, Pösch-Teller, dan lain-lain [8,10,11]. Potensial sentral adalah potensial yang mempunyai energi potensial yang hanya merupakan fungsi jarak antara partikel yang dikaji dengan titik yang merupakan sumber potensial (gaya) yang mempengaruhi partikel tersebut. Untuk potensial non-sentral, energi potensialnya merupakan fungsi jarak dan sudut sekaligus. Potensial non-sentral Pösch-Teller termodifikasi plus Scarf adalah salah satu potensial non-sentral yang mempengaruhi vibrasi molekul di dalam inti atom [11]. Sedangkan potensial non-sentral Rosen-Morse plus Rosen-Morse adalah salah satu potensial yang memungkinkan terjadinya interaksi quark dalam pembahasan dinamika quark-gluon QCD. Potensial ini mereproduksi daerah perantara potensial pengungkungan linier (berhubungan dengan interaksi multi gluon) sebagai ketentuan kalkulasi-kalkulasi pola geometris molekul-molekul QCD pada sifat hadron [12].

Potensial non-sentral adalah kombinasi dari potensial *shape invariance* atau *non shape invariance*, baik fungsi hiperbolik, eksponensial dan trigonometrik, yang merupakan fungsi radial saja dengan potensial *shape invariance* trigonometrik yang merupakan fungsi radial dan sudut [11].

Quantum deformasi (q-deformasi) mendapat banyak perhatian dari para ilmuwan teori sekarang ini, karena berhubungan dengan aplikasi dalam inti, teori String, dan teori statistik kuantum [13]. q-deformasi merupakan bentuk potensi yang memainkan peranan penting terutama ketika struktur inti rusak atau interaksi akibat gangguan [14].

Metodologi Penelitian

Potensial non-sentral *shape invariance* q-deformasi, yaitu potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (NU). Penelitian ini merupakan studi literatur untuk menyelesaikan persamaan Schrödinger potensial terdeformasi Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse dengan q-deformasi secara analitik.

Hasil dan Pembahasan

Review Metode Nikiforov-Uvarov

Persamaan Schrödinger satu dimensi untuk suatu sistem kuantum yang dipengaruhi oleh medan dengan energi potensial $V(x)$ dapat dituliskan sebagai

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

Persamaan Schrödinger satu dimensi untuk potensial *shape invariance* dapat diubah (direduksi) menjadi persamaan diferensial orde dua fungsi hipergeometri atau *confluent hypergeometry* dengan substitusi variabel yang sesuai. Persamaan tipe hipergeometri yang diperoleh dari persamaan Schrödinger pada pers. (1) dengan substitusi variabel yang sesuai yang dapat diselesaikan dengan metode NU disajikan sebagai

$$\frac{\partial^2\psi(s)}{\partial s^2} + \frac{\overline{\tau}(s)}{\sigma(s)} \frac{\partial\psi(s)}{\partial s} + \frac{\overline{\sigma}(s)}{\sigma^2} \psi(s) = 0 \quad (2)$$

dengan $\sigma(s)$ dan $\overline{\sigma}(s)$ merupakan polinomial yang pada umumnya berderajat dua, sedangkan $\overline{\tau}(s)$ merupakan polinomial berderajat satu, yang masing-masing dinyatakan sebagai

$$\sigma(s) = as^2 + bs + c, \overline{\tau}(s) = ds + e \quad (3)$$

Dalam penggunaan selanjutnya pers. (2) akan kita sebut sebagai persamaan perantara persamaan hipergeometri (PPPH). Pers. (2) diperoleh dari pers. (1) dengan substitusi variabel yang sesuai.

Persamaan (2) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel yaitu

$$\psi = \phi(s)y(s) \quad (4)$$

Dengan memasukkan pers. (4) ke dalam pers. (2) diperoleh persamaan diferensial orde dua yang disebut dengan persamaan tipe hipergeometri karena mempunyai komponen-komponen yang sama dengan persamaan hipergeometri, yaitu

$$\sigma \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \tau \frac{\partial y}{\partial s} + \lambda y = 0 \quad (5)$$

Dengan mengaplikasikan pers. (3) pada persamaan hipergeometri pada persamaan berikut

$$z(1-z) \frac{d^2\phi}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{d\phi}{dz} - ab\phi = 0 \quad (6)$$

diperoleh $\sigma = z - z^2$ maka $a = -1$, $b = 1$, dan $c = 0$; $\tau = c' - (a' + b' + 1)z$ maka $d = -(a' + b' + 1)$, $e = c'$ dan $\lambda = a'b'$. Sedangkan fungsi $\phi(s)$ adalah derivatif logaritmik yang penyelesaiannya diperoleh dari kondisi

$$\frac{\phi'}{\phi} = \frac{\pi}{\sigma} \quad (7)$$

dimana fungsi $\pi(s)$ dan parameter λ didefinisikan sebagai

$$\pi = \left(\frac{\sigma' - \overline{\tau}}{2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \overline{\tau}}{2} \right)^2 - \overline{\sigma} + k\sigma} \quad (8)$$

$$\lambda = k + \pi' \tag{9}$$

Nilai k di dalam akar pada pers. (8) dapat ditentukan dari kondisi bahwa pernyataan kuadrat di bawah akar harus merupakan kuadrat sempurna dari polynomial berderajat satu sehingga diskriminan dari pernyataan kuadrat di bawah akar harus sama dengan nol. Lebih lanjut energi eigen nilai yang baru pada pers. (5) dinyatakan sebagai

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = -nd - n(n-1)a \tag{10}$$

dengan $n = 0, 1, 2$, dan

$$\tau = \bar{\tau} + 2\pi \tag{11}$$

Energi eigen nilai dapat diperoleh dari persamaan (9) dan (10).

Untuk memperoleh energi eigen nilai dan eigen fungsi dari sistem *bound-state* maka dipersyaratkan bahwa $\tau' < 0$. Penyelesaian bagian kedua fungsi

gelombang, $y_n(s)$, yang dalam persamaan relasi Rodrigues disajikan sebagai

$$y_n(s) = \frac{c_n}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n} (\sigma^n(z)\rho(z)) \tag{12}$$

dimana c_n adalah konstanta normalisasi, dan fungsi bobot $\rho(s)$ memenuhi kondisi yang dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial(\sigma\rho)}{\partial s} = \tau(s)\rho(s) \tag{13}$$

Dengan menggunakan persamaan (4), (7), (12), dan (13) dapat diperoleh fungsi gelombang secara lengkap dari sistem partikel yang dikaji.

Persamaan (5) adalah bentuk persamaan diferensial orde dua fungsi hipergeometri. Sedangkan persamaan (2) dan (4) serta parameter-parameter yang terkandung dalam persamaan (2) dan (3) untuk mengaplikasikan metode NU dalam penyelesaian persamaan Schrödinger untuk potensial yang cukup kompleks [9].

Potensial Non Sentral Pöschl-Teller Termodifikasi Plus Scarf Trigonometri q-Deformasi

Fungsi Hyperbolik terdeformasi yang diperkenalkan [13,15-18] diperoleh yaitu

$$\sinh_q x = \frac{e^x - qe^{-x}}{2}; \cosh_q x = \frac{e^x + qe^{-x}}{2}; \tanh_q x = \frac{\sinh_q x}{\cosh_q x} \tag{14}$$

dan

$$\coth_q x = \frac{\cosh_q x}{\sinh_q x}; \operatorname{sech}_q x = \frac{1}{\cosh_q x}; \operatorname{csch}_q x = \frac{1}{\sinh_q x} \tag{15}$$

Dari persamaan (14) dan (15) diperoleh sebagai

$$\cosh_q^2 x - \sinh_q^2 x = q; 1 - \tanh_q^2 x = q \operatorname{sech}_q^2 x \tag{16}$$

Dengan translasi yang sesuai dari variabel spatial [16] yang didapatkan sebagai berikut

$$r = y + \frac{\ln \sqrt{q}}{\alpha} \tag{17}$$

Kemudian, mengganti fungsi hyperbolik *q-deformed* ke dalam salah satu *non-deformed* atau sebaliknya sebagai berikut

$$\sinh_q \alpha r = \frac{e^{\alpha r} - qe^{-\alpha r}}{2} = \frac{e^{\alpha(y + \frac{\ln \sqrt{q}}{\alpha})} - qe^{-\alpha(y + \frac{\ln \sqrt{q}}{\alpha})}}{2} = \frac{\sqrt{q}e^{\alpha y} - \frac{qe^{-\alpha y}}{\sqrt{q}}}{2} = \sqrt{q} \sinh \alpha y \tag{18}$$

$$\sinh \alpha y = \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2} = \frac{e^{\alpha(x - \frac{\ln \sqrt{q}}{\alpha})} - e^{-\alpha(x - \frac{\ln \sqrt{q}}{\alpha})}}{2} = \frac{\frac{e^{\alpha r}}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}e^{-\alpha r}}{2} = \frac{e^{\alpha r} - qe^{-\alpha r}}{2\sqrt{q}} = \frac{\sinh_q \alpha r}{\sqrt{q}} \tag{19}$$

Pada umumnya, serupa ke persamaan (14) diperoleh

$$\sinh_q \alpha r = \sqrt{q} \sinh \alpha y; \cosh_q \alpha r = \sqrt{q} \cosh \alpha y; \tanh_q \alpha r = \tanh \alpha y; \tag{20}$$

$$\sinh \alpha y = \frac{\sinh_q \alpha r}{\sqrt{q}}; \cosh \alpha y = \frac{\cosh_q \alpha r}{\sqrt{q}}; \tanh \alpha y = \tanh_q \alpha r \tag{21}$$

Berdasarkan persamaan (14), (15), (16) dan (17) dan transformasi potensial terdeformasi ke transformasi non-deformasi maka dapat diperoleh hubungan antara deformasi dan non-deformasi seperti pada persamaan (20) dan (21) sehingga dapat diambil hubungan antara potensial deformasi dan potensial trigonometri yaitu

$$\sin_q x = \frac{-i(e^{ix} - qe^{-ix})}{2}; \cos_q x = \frac{e^{ix} + qe^{-ix}}{2}; \tan_q x = \frac{\sin_q x}{\cos_q x} \quad (22)$$

$$\cot_q x = \frac{\cos_q x}{\sin_q x}; \sec_q x = \frac{1}{\cos_q x}; \csc_q x = \frac{1}{\sin_q x} \quad (23)$$

$$\sin_q^2 x + \cos_q^2 x = q; 1 + \tan_q^2 x = q \sec_q^2 x \quad (24)$$

Potensial efektif Pösch-Teller termodifikasi untuk trogonometri [4,19] yaitu

$$V_{ef} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\kappa(\kappa - 1)}{\sinh^2 r} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\cosh^2 r} \right) \quad (25)$$

Dengan menggunakan persamaan (22) dan (25) diperoleh potensial Pöschl-Teller termodifikasi q-deformasi adalah

$$V_{ef_q} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\kappa(\kappa - 1)}{\sinh_q^2 r} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{\cosh_q^2 r} \right) \quad (26)$$

Potensial efektif Scarf II untuk trigonometri untuk bagian sudut [4,19]

$$V_{ef} = \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \left(\frac{b^2 + a(a - 1)}{\sin^2 \theta} - \frac{2b(a - \frac{1}{2}) \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right) \quad (27)$$

Dengan menggunakan persamaan (22) dan (27) diperoleh potensial Scarf bagian sudut q-deformasi

$$V_{ef_q} = \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \left(\frac{b^2 + a(a - 1)}{\sin_q^2 \theta} - \frac{2b(a - \frac{1}{2}) \cos_q \theta}{\sin_q^2 \theta} \right) \quad (28)$$

Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Rosen-Morse q-Deformasi

Potensial non sentral Rosen-Morse untuk trigonometri untuk bagian radial memiliki bentuk persamaan

$$V_{ef} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{v(v + 1)}{\sin^2 r} - 2\mu \cot r \right) \quad (29)$$

Dengan menggunakan persamaan (22) dan (29) diperoleh potensial Rosen-Morse q-deformasi untuk bagian radial [20]

$$V_{ef_q} = \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{v(v + 1)}{\sin_q^2 r} - 2\mu \cot_q r \right) \quad (30)$$

Potensial non sentral Rosen-Morse dengan faktor sentrifugal untuk bagian sudut memiliki bentuk persamaan

$$V_{ef} = \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \left(\frac{v(v + 1)}{\sin^2 \theta} - 2\mu \cot \theta \right) \quad (31)$$

Dengan menggunakan persamaan (22) dan (31) diperoleh potensial Rosen-Morse q-deformasi untuk bagian sudut [20]

$$V_{ef_q} = \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \left(\frac{v(v + 1)}{\sin_q^2 \theta} - 2\mu \cot_q \theta \right) \quad (32)$$

Penyelesaian Persamaan Schrödinger Potensial Non Sentral Pöschl-Teller Termodifikasi Plus Scarf Trigonometri q-Deformasi dan Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Rosen Morse Menggunakan Metode NU

Persamaan Schrödinger Tiga Dimensi Potensial Non Sentral Pöschl-Teller Termodifikasi (PTT) Plus Scarf Trigonometri (ST) q-Deformasi

Persamaan Schrödinger tiga dimensi potensial non-sentral PTT plus ST q-deformasi dinyatakan sebagai

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin_q \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin_q \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin_q^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \psi + \left\{ \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sinh_q^2 r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh_q^2 r} \right) + \frac{\hbar^2}{2Mr^2} \left(\frac{b^2 + a(a-1)}{\sin_q^2 \theta} - \frac{2b(a-\frac{1}{2}) \cos_q \theta}{\sin_q^2 \theta} \right) \right\} \psi = E\psi \quad (33)$$

Pers. (33) diselesaikan dengan metode pemisahan variabel sehingga diperoleh tiga persamaan diferensial satu dimensi fungsi radial, fungsi sudut polar dan azimuthal yang dinyatakan sebagai

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) \right\} - \left\{ r^2 \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sinh_q^2 r} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\cosh_q^2 r} \right) \right\} + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} E = \lambda = \ell(\ell+1) \quad (34a)$$

$$-\left\{ \frac{1}{\Theta \sin_q \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin_q \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left(\frac{b^2 + a(a-1)}{\sin_q^2 \theta} - \frac{2b(a-\frac{1}{2}) \cos_q \theta}{\sin_q^2 \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin_q^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right\} = \lambda = \ell(\ell+1) \quad (34b)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = -m^2 \quad (34c)$$

Bentuk penyelesaian persamaan (34c) adalah

$$\phi = A_m e^{im\varphi} \quad (35)$$

Penyelesaian Persamaan Schrödinger Bagian Radial Potensial Non Sentral Pöschl-Teller Termodifikasi (PTT) Plus Scarf Trigonometri (ST) q-Deformasi

Untuk menyelesaikan pers. (34a) diselesaikan dengan menggunakan faktor sentrifugal $\frac{1}{r^2} \cong \left(d_0 + \frac{1}{\sinh_q^2 r} \right)$, $d_0 = \frac{1}{12}$ dengan mengatur $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ dan $\varepsilon^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$ [21] serta dengan melakukan substitusi variabel $\cosh_q^2 r = s$ pers. (34a) berubah menjadi

$$\left(2(2s-q) \frac{\partial}{\partial s} + 4s(s-q) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \chi - \left(\frac{\kappa(\kappa-1) + \ell(\ell+1)}{s-q} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{s} + s^2 + \ell(\ell+1)d_0 \right) \chi(r) = 0 \quad (36)$$

Persamaan (36) dianalogikan dengan persamaan (2) diperoleh nilai $\bar{\tau}(s) = (s - \frac{q}{2})$; $\sigma(s) = s^2 - qs$; dan $\bar{\sigma} = -\left[\frac{(\kappa(\kappa-1) + \ell(\ell+1) - \lambda(\lambda+1))s}{4} + \frac{\lambda(\lambda+1)q}{4} + \frac{(\varepsilon^2 + \ell(\ell+1)d_0)(s^2 - qs)}{4} \right]$ sehingga fungsi $\pi(s)$ dan parameter λ diperoleh sebagai berikut

$$\pi = \left(\frac{s - \frac{q}{2}}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\kappa(\kappa-1) + \ell(\ell+1) - \lambda(\lambda+1) - (\varepsilon^2 + \ell(\ell+1)d_0 + 4k+1)q)s + \left(\lambda(\lambda+1)q + \frac{q^4}{4} \right) + (\varepsilon^2 + \ell(\ell+1)d_0 + 4k+1)s^2} \quad (37)$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna $ax^2 + bx + c = 0$, maka $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$; $D = 0$; maka persamaan (36) menjadi

$$\pi = \left(\frac{s - \frac{q}{2}}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{s^2 + \ell(\ell+1)d_0 + 4k+1} \times \left(s + \frac{\kappa(\kappa-1) + \ell(\ell+1) - \lambda(\lambda+1) - (s^2 + \ell(\ell+1)d_0 + 4k+1)q}{2(s^2 + \ell(\ell+1)d_0 + 4k+1)} \right) \quad (38)$$

Dimana deskriminan dari kuadrat sempurna bernilai 0, yaitu $D = b^2 - 4ac = 0$. Dengan menggunakan persamaan (38) maka deskriminannya adalah

$$\begin{aligned} & \left(\kappa(\kappa - 1) + \ell(\ell + 1) + \frac{q}{4} - \lambda(\lambda + 1) - \frac{q}{4} - (\varepsilon^2 + \ell(\ell + 1)d_0 + 4k + 1)q \right)^2 \\ & - 4(\varepsilon^2 + \ell(\ell + 1)d_0 + 4k + 1) \left(\lambda(\lambda + 1)q + \frac{q^2}{4} \right) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Nilai k dari persamaan (39) di atas dapat dihitung dengan memisalkan $\kappa(\kappa - 1) + \ell(\ell + 1) + \frac{q}{4} = v$; $\lambda(\lambda + 1) - \frac{q}{4} = t$; $\varepsilon^2 + \ell(\ell + 1)d_0 + 1 = u$; $\varepsilon^2 + \ell(\ell + 1)d_0 = u - 1$; sehingga diperoleh dua nilai k yaitu

$$k_1 = \frac{(\sqrt{v} + \sqrt{t})^2 - uq}{4q}; k_2 = \frac{(\sqrt{v} - \sqrt{t})^2 - uq}{4q} \quad (40)$$

Dengan memisalkan $o = \sqrt{v/q}$ dan $w = \sqrt{t/q}$ maka persamaan (40) menjadi

$$k_1 = \frac{(w + o)^2 - u}{4}; k_2 = \frac{(w - o)^2 - u}{4} \quad (41)$$

Sehingga diperoleh nilai

$$\pi_1 = -\frac{1}{2}s(w + o - 1) + \frac{wq}{2} - \frac{q}{4}; \pi_2 = -\frac{1}{2}s(w - o - 1) + \frac{wq}{2} - \frac{q}{4} \quad (42)$$

Untuk nilai τ diperoleh dengan menggunakan persamaan (11) sehingga

$$\tau_1 = -s(w + o - 2) + wq - q; \tau_2 = -s(w - o - 2) + wq - q \quad (43)$$

Sedangkan nilai λ diperoleh dengan menggunakan persamaan (10) didapatkan

$$\lambda_1 = \lambda_n = wn + on - n - n^2u - 1 = (w + o - 2n - 1)^2 \quad (44)$$

dan

$$\lambda_2 = \lambda_n = wn - on - n - n^2u - 1 = (w - o - 2n - 1)^2 \quad (45)$$

Berdasarkan persamaan diperoleh pada k , λ , π terdapat dua nilai maka yang digunakan adalah untuk k_2 , λ_2 , π_2 dibandingkan k_1 , λ_1 , π_1 karena energi yang sesuai dengan yang sudah ditemukan jadi energinya digunakan parameter E_2 yang memenuhi energi nilai eigen untuk potensial Pöschl-Teller termodifikasi yang sesuai dengan penelitian terdahulu [6,10] untuk $q = 1$. Energi yang diperoleh [13] yaitu

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda(\lambda + 1)}{q}} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\kappa(\kappa - 1)}{q}} - 2n - 1 \right)^2 - \ell(\ell + 1)d_0 \quad (46)$$

Sedangkan fungsi $\phi(s)$ adalah derivatif logaritmik menggunakan persamaan (7) diperoleh

$$\phi = s^{(-\frac{w}{2} + \frac{1}{4})} (s - q)^{(\frac{o}{2} + \frac{1}{4})} \quad (47)$$

Fungsi bobot dengan kriteria diperoleh

$$\rho = s^{-w} (s - q)^o \quad (48)$$

Penyelesaian bagian kedua fungsi gelombang, $y_n(s)$, yang dalam persamaan relasi Rodrigues pada persamaan (12) diperoleh

$$y_n(z) = \frac{C_n q^n (-1)^n (2^{-1})^n}{(1+z)^{-w} (1-z)^o} \frac{d^n}{d(1+z)^n} ((1+z)^{-w+n} (1-z)^{o+n}) \quad (49)$$

Dengan menggunakan Polynomial Jacobian maka persamaan (49) menjadi

$$y_n(z) = C_n q^n n! P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = B_n P_n^{(\alpha, \beta)}(z) \quad (50)$$

Normalisasi fungsi gelombang apabila dalam bentuk satu dimensi (dalam bentuk $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$) maka berlaku

$$\int_0^\infty \psi_n(r) \psi_n^*(r) dr = 1$$

Sedangkan, apabila belum dalam bentuk satu dimensi/tiga dimensi (dalam bentuk $R(r)$) maka berlaku

$$\int_0^\infty \psi_n(r)\psi_n^*(r)r^2 dr = 1$$

Karena sudah diubah ke dalam bentuk satu dimensi maka berlaku

$$(2)^{-1} B_n B_m \int_1^\infty \left(s^{-w} (s-q)^o P_n^{(\alpha,\beta)} P_m^{(\alpha,\beta)} \right) ds = 1 \tag{51}$$

Karena orthogonal polinomial Jacoby maka untuk $n = m$ sehingga persamaan (51) menjadi

$$B_n^2 = (2) \frac{2n + \alpha + \beta + 1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)} \tag{52}$$

Fungsi gelombang lengkap bagian radial untuk potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf q-deformasi dengan menggunakan persamaan (47) dan (50) maka diperoleh [20]:

$$R(r) = \frac{\left(\cosh_q^2 r - \sqrt{\frac{\lambda(\lambda+1) - \frac{q}{4}}{2}} + \frac{1}{4} (\cosh_q^2 r - q) \sqrt{\frac{\kappa(\kappa-1) + \ell(\ell+1) + \frac{q}{4}}{2}} + \frac{1}{4} B_n P_n^{(\alpha,\beta)} \right)}{r} \tag{53}$$

Penyelesaian Persamaan Schrödinger Bagian Sudut Potensial Non Sentral Pöschl-Teller Termodifikasi (PTT) Plus Scarf Trigonometri (ST) q-Deformasi

Untuk menyelesaikan pers. (34b) diselesaikan dengan mengalikan $\frac{\Theta}{\sin_q^2 \theta}$ dan melakukan substitusi variabel $\cos_q \theta = s$, pers. (34b) berubah menjadi

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial s^2} - \frac{2s}{(q-s^2)} \frac{\partial \Theta}{\partial s} - \left(\frac{[b^2 + a(a-1) + m^2] - 2b(a - \frac{1}{2})s - \ell(\ell+1)(q-s^2)}{(q-s^2)^2} \right) \Theta = 0 \tag{54}$$

Persamaan (54) dianalogikan dengan persamaan (2) diperoleh nilai $\bar{\tau}(s) = -2s$; $\sigma(s) = q - s^2$; dan $\bar{\sigma} = -[b^2 + a(a-1) + m^2] - 2b(a - \frac{1}{2})s - \ell(\ell+1)(q-s^2)$ sehingga fungsi $\pi(s)$ dan parameter λ diperoleh sebagai berikut

$$\pi = \pm \sqrt{(\ell(\ell+1) - k)s^2 - \left(2b(a - \frac{1}{2}) \right) s + (b^2 + a(a-1) + m^2) - \ell(\ell+1)q + kq} \tag{55}$$

Dengan menggunakan kuadrat sempurna $ax^2 + bx + c = 0$, maka $a(x + \frac{b}{2a})^2 = 0$; $D = 0$, maka persamaan (55) menjadi

$$\pi = \pm \sqrt{\ell(\ell+1) - k} \left(s + \frac{-2b(a - \frac{1}{2})}{2(\ell(\ell+1) - k)} \right) \tag{56}$$

Dimana deskriminan dari kuadrat sempurna bernilai 0, yaitu $D = b^2 - 4ac = 0$. Dengan menggunakan persamaan (56) maka deskriminannya adalah

$$b^2(a - \frac{1}{2})^2 - \{\ell(\ell+1) - k\} \{b^2 + a(a-1) + m^2 - (\ell(\ell+1) - k)q\} = 0 \tag{57}$$

Nilai k dari persamaan (45) di atas dapat dihitung dengan memisalkan $\ell(\ell+1) - k = p^2$, maka $\ell(\ell+1) - p^2 = k$ sehingga diperoleh dua nilai p yaitu

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{b^2 + a(a-1) + m^2 \pm \sqrt{[b^2 + a(a-1) + m^2]^2 - 4q[b^2(a - \frac{1}{2})^2]}}{2q}} \tag{58}$$

Sehingga diperoleh nilai

$$\pi = \pm \left(ps + \frac{-b(a - \frac{1}{2})}{p} \right) \tag{59}$$

Persamaan (59) dipilih nilai yang negatif. Untuk nilai τ diperoleh dengan menggunakan persamaan (11) sehingga

$$\tau = -2s - 2ps + \frac{2b(a - \frac{1}{2})}{p} \quad (60)$$

Sedangkan nilai λ diperoleh dengan menggunakan persamaan (10) didapatkan

$$\lambda = \lambda_n = 2n + 2pn + n(n - 1) \quad (61)$$

Nilai bilangan kuantum orbital dapat dengan menggunakan persamaaan (58) dan persamaan (61) sehingga diperoleh

$$\left(\ell + \frac{1}{2}\right) = \left(n + p + \frac{1}{2}\right) \quad (62)$$

Dengan persamaan (49) digunakan untuk mencari nilai bilangan kuantum orbital untuk potensial Pösch-Teller termodifikasi plus Scarf q-deformasi yang memenuhi seperti yang sudah ditemukan sebelumnya [20] yang terdapat dalam nilai p maka energi yang diperoleh yaitu

$$\left(\ell + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \sqrt{\frac{b^2 + a(a - 1) + m^2}{4q} + \frac{\frac{2b}{\sqrt{q}}(a - \frac{1}{2})}{4}} + \sqrt{\frac{b^2 + a(a - 1) + m^2}{4q} - \frac{\frac{2b}{\sqrt{q}}(a - \frac{1}{2})}{4}} + \frac{1}{2}\right) \quad (63)$$

Persamaan (63) sesuai dengan energi yang sudah digunakan untuk $q = 1$, maka persamaan (63) merupakan persamaan energi potensial Pösch-Teller termodifikasi plus Scarf untuk terdeformasi.

Fungsi $\phi(s)$ adalah derivatif logaritmik menggunakan persamaan (7) diperoleh

$$\phi = (\sqrt{q} - s)^{-\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + \frac{p}{2}} (\sqrt{q} + s)^{\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + \frac{p}{2}} \quad (64)$$

Fungsi bobot dengan kriteria diperoleh

$$\rho = (\sqrt{q} - s)^{-\frac{b(a-\frac{1}{2})}{p\sqrt{q}} + p} (\sqrt{q} + s)^{\frac{b(a-\frac{1}{2})}{p\sqrt{q}} + p} \quad (65)$$

Penyelesaian bagian kedua fungsi gelombang, $y_n(s)$, yang dalam persamaan relasi Rodrigues pada persamaan (12) diperoleh

$$y_n(s) = \frac{C_n}{(\sqrt{q} - s)^{-\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + p} (\sqrt{q} + s)^{\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + p}} \frac{d^n}{ds^n} (\sqrt{q} - s)^{-\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + p + n} (\sqrt{q} + s)^{\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + p + n} \quad (66)$$

Dengan menggunakan Polynomial Jacobian maka persamaan (66) menjadi

$$y_n(s) = (-1)^n 2^n n! C_n q^n P_n^{(\alpha, \beta)} = B_n P_n^{(\alpha, \beta)} \quad (67)$$

Normalisasi fungsi gelombang berlaku

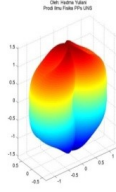
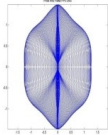
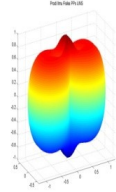
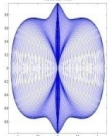
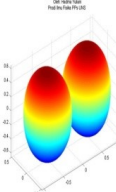
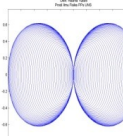
$$\int_0^\infty \psi_n(\theta) \psi_n^*(\theta) d\theta = 1 \quad (68)$$

Sedangkan apabila belum maka diperoleh fungsi gelombang lengkap bagian sudut untuk potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf q-deformasi dengan menggunakan persamaan (64) dan (67)

$$\Theta = (\sqrt{q} - \cos_q \theta)^{-\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + \frac{p}{2}} (\sqrt{q} + \cos_q \theta)^{\frac{b(a-\frac{1}{2})}{2p\sqrt{q}} + \frac{p}{2}} B_n P_n^{(\alpha, \beta)} \quad (69)$$

Persamaan fungsi gelombang bagian sudut secara lengkap pada persamaan (69) untuk potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf II dapat divisualisasikan secara 3 dimensi dan 2 dimensi dengan menggunakan *software* Matlab 6.1 dengan menggunakan variasi parameter q untuk $m = 1$, $n_\ell = 0$, $a = 0$, dan $b = 0$ seperti Tabel 1 [13] berikut.

Tabel 1 Visualisasi secara 3 dimensi dan 2 dimensi untuk potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf II bagian sudut dengan menggunakan *software* Matlab 6.1 dengan menggunakan variasi parameter q untuk $m = 1$, $n_\ell = 0$, $a = 0$, dan $b = 0$.

Θ_{qnlmab}	3 Dimensi	2 Dimensi (sumbu XY)
$\Theta_{2;0;0;707;1;0;0}$		
$\Theta_{1,5;0;0;8165;1;0;0}$		
$\Theta_{1;0;1;1;0;0}$		

Persamaan Schrödinger Tiga Dimensi Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Rosen-Morse q-Deformasi

Persamaan Schrödinger tiga dimensi potensial non sentral Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi yaitu persamaan (30) dan (32) diselesaikan sama seperti persamaan Schrödinger tiga dimensi potensial non sentral Pöschl-Teller termodifikasi (PTT) plus Scarf trigonometri (ST) q-deformasi sehingga diperoleh persamaan orde dua fungsi bagian radial, polar dan azimut menjadi

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - r^2 \left(\frac{v(v+1)}{\sin_q^2 r} - 2\mu \cot_q r \right) + \frac{2Mr^2}{\hbar^2} E = \lambda = \ell(\ell+1) \tag{70a}$$

$$\frac{\sin_q \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin_q \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \left(\frac{v(v+1)}{\sin_q^2 \theta} - 2\mu \cot_q \theta \right) + \lambda \sin^2 \theta = m^2 \tag{70b}$$

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2; \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 \tag{70c}$$

Bentuk penyelesaian persamaan (70c) adalah

$$\phi = A_m e^{im\varphi} + B_m e^{-im\varphi} \tag{71}$$

Penyelesaian Persamaan Schrödinger Bagian Radial Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Rosen-Morse q-Deformasi

Persamaan (70a) di atas dengan menggunakan faktor sentrifugal $\frac{1}{r^2} \cong \left(d_0 + \frac{1}{\sinh_q^2 \frac{r}{a}} \right)$ dengan $d_0 = \frac{1}{12}$ dengan mengatur $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ dan $\epsilon^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E$ maka persamaan (70a) menjadi

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 \chi}{dr^2} - \left(\frac{v(v+1) + \ell(\ell+1)}{\sin_q^2 r} - 2\mu \cot_q r \right) \frac{\chi(r)}{r} + \frac{2M}{\hbar^2} E \frac{\chi(r)}{r} - \ell(\ell+1) d_0 \frac{\chi(r)}{r} = 0 \tag{72}$$

Dengan menggunakan cara yang hampir sama seperti penyelesaian persamaan Schrödinger bagian radial potensial non sentral Pöschl-Teller termodifikasi (PTT) plus Scarf trigonometri (ST) q-deformasi diperoleh persamaan spektrum energi dan fungsi gelombang bagian radial untuk potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi [20] yaitu

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\mu^2}{\left(\sqrt{\ell(\ell+1) + v(v+1) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2}\right)^2} - q \left(\sqrt{\ell(\ell+1) + v(v+1) + \frac{1}{4}} - n - \frac{1}{2} \right)^2 - \ell(\ell+1)d_0 \right) \quad (73)$$

dan

$$R(r) = \frac{C_n (q + s^2)^{\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{\mu}{p} \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{s}{\sqrt{q}}\right) \frac{d^n}{ds^n} \left((q + s^2)^{-p+n} \exp\left(\frac{2\mu}{p} \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{s}{\sqrt{q}}\right) \right)}{r} \quad (74)$$

dengan nilai p pada persamaan (74) yaitu

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{-(\varepsilon^2 + \ell(\ell+1)d_0) \pm \sqrt{(\varepsilon^2 + \ell(\ell+1)d_0)^2 + 4q\mu^2}}{2q}} \quad (75)$$

Penyelesaian Persamaan Schrödinger Bagian Sudut Potensial Non Sentral Rosen-Morse Plus Rosen-Morse q-Deformasi

Penyelesaian persamaan Schrödinger bagian sudut potensial non sentral Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi yaitu persamaan (70b) dengan menggunakan cara yang hampir sama seperti penyelesaian persamaan Schrödinger bagian sudut potensial non sentral Pöschl-Teller termodifikasi (PTT) plus Scarf trigonometri (ST) q-deformasi diperoleh persamaan bilangan orbital dan fungsi gelombang bagian sudut untuk potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi yaitu

$$\ell = \sqrt{q \left(\sqrt{v(v+1) + m^2 - \frac{q}{4} + \frac{1}{4}} + n + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\mu^2}{\left(\sqrt{v(v+1) + m^2 - \frac{q}{4} + \frac{1}{4}} + n + \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{1}{2}} \quad (76)$$

dan

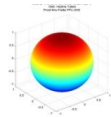
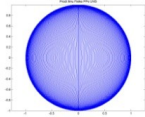
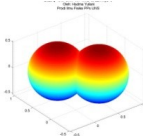
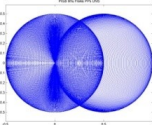
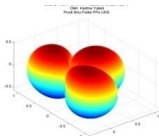
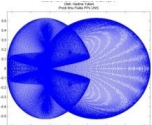
$$\Theta(\theta) = \frac{C_n (q + \cot_q^2 \theta)^{\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{\mu}{p} \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{\cot_q \theta}{\sqrt{q}}\right) \frac{d^n}{ds^n} \left((q + \cot_q^2 \theta)^{-p+n} \exp\left(\frac{2\mu}{p} \frac{1}{\sqrt{q}} \arctan \frac{\cot_q \theta}{\sqrt{q}}\right) \right)}{\sqrt{\sin_q \theta}} \quad (77)$$

Dengan nilai p yang digunakan pada persamaan (77) yaitu

$$p_{1,2} = \sqrt{\frac{(\ell(\ell+1) + \frac{1}{4}) + \sqrt{(\ell(\ell+1) + \frac{1}{4})^2 + 4q\mu^2}}{2q}} \quad (78)$$

Persamaan fungsi gelombang bagian sudut secara lengkap pada persamaan (78) untuk potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse dapat divisualisasikan secara 3 dimensi dan 2 dimensi dengan menggunakan *software* Matlab 6.1 dengan menggunakan variasi parameter q untuk $n_\ell = 0$, $a = 0$, dan $b = 0$ seperti Tabel 2 [20] berikut.

Tabel 2 Visualisasi gambar fungsi gelombang sudut untuk potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi dengan variasi parameter q untuk $n_\ell = 0$, $a = 0$, dan $b = 0$.

Θ_{qnlmab}	3 Dimensi	2 Dimensi (sumbu XY)
$\Theta_{1;0;0;0;0;0}$		
$\Theta_{1;0;1;1;0;0}$		
$\Theta_{1,5;0;1,258;1;0;0}$		

Kesimpulan

Spektrum energi dan fungsi gelombang beberapa potensial non-sentral *shape invariance* q-deformasi, yaitu potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi dapat dianalisis menggunakan metode Nikiforov-Uvarov (NU). Persamaan gelombang persamaan Schrödinger untuk beberapa potensial non-sentral *shape invariance* q-deformasi, yaitu potensial Pöschl-Teller termodifikasi plus Scarf dan potensial Rosen-Morse plus Rosen-Morse q-deformasi dapat divisualisasikan dengan menggunakan program Matlab 6.1.

Hasil penelitian ini dapat disimpulkan spektrum energi dan fungsi gelombang persamaan Schrödinger untuk potensial non-sentral terdeformasi dianalisa dengan menggunakan Nikiforov-Uvarov. Spektrum dan fungsi gelombang bagian radial diperoleh dari persamaan Schrödinger bagian radial dan hasilnya hanya bersifat pendekatan karena hadirnya faktor sentrifugal. Fungsi gelombang bagian sudut polar dan bilangan kuantum orbital diperoleh dari persamaan Schrödinger bagian sudut polar.

Implikasi praktis yang dapat dikemukakan berdasarkan kesimpulan penelitian ini antara lain metode Nikiforov-Uvarov dapat digunakan sebagai alternatif penyelesaian persamaan Schrödinger untuk menyelesaikan potensial non-sentral terdeformasi yang lainnya.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Suparmi, Ph.D. dan Prof. Cari, Ph.D. yang telah membimbing dan membantu dalam penelitian ini.

Referensi

- [1] Suparmi, *Mekanika Kuantum I*, (Jurusan Fisika MIPA Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2011).
- [2] Ikot, D. Antia, E. Akpabio dan A. Obu, *JVR* **6** (2), 65 (2011).
- [3] F. Cooper, Khare A dan Sukhatme, *Phys. Rep.* **256** (267), 271(1995).
- [4] Suparmi, *Semiclassical Quantization Rules in Supersymmetric Quantum Mechanics*, (Disertasi, SUNNY The University at Albany Physics Departement, 1992).
- [5] A.F. Nikiforov dan U.B. Uvarov, *Special Function in Mathematical Physics*, (Birkhausa, Basel, 1998).
- [6] C. Cari dan Suparmi, *IOSR-JAP* **2** (3), 13 (2012).
- [7] F.D.E.A. Castillo, *Exactly Solvable Potentials and Romanovski Polynomials in Quantum Mechanics*, (Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potos, 2007).
- [8] A. Suparmi, C. Cari, J. Handika, C. Yanuarief dan H. Marini, *IOSR-JAP* **2** (2), 43 (2012).
- [9] Cari, *Mekanika Kuantum Penyelesaian Potensial Non-Sentral dengan Supersimetri, Hypergeometry, Nikifarov Uvarov, dan Polynomial Romanovski*, (UNS Press, Surakarta, 2013).
- [10] Suparmi, *Mekanika Kuantum II*, (Jurusan Fisika MIPA Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2011).
- [11] Suparmi, Cari, H. Yuliani dan D. Yuniati, *Jurnal Fisika Indonesia* **XVII** (51), 41 (2013).

- [12] C.B. Compean dan M. Kirchbach, *The Trigonometric Rosen-Morse Potential as a Prime Candidate for an Effective QCD Potential*, (Instituto de Física, Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Av. Manuel Nava 6, S.L.P. 78290, México (Abstr.) 2006).
- [13] A. Arda, R. Sever dan C. Tezcan, arXiv:0911.4558v1.
- [14] M. Chabab, R. Jourdani dan M. Oulne, *Int. J. Phys. Sci.* **7** (8), 1150 (2012).
- [15] A. Arai, *J. Math. Anal. Appl.* **158**, 63 (1991).
- [16] A. de Souza Dutra, *Mapping Deformed Hyperbolic Potentials into Nondeformed Ones*, (UNESP-Campus de Guaratingueta-DFQ, Brasil, 2008).
- [17] C.S. Jia, Y. Sun dan Y. Li, *Phys. Lett. A* **305**, 231 (2002).
- [18] R. Akbarich dan H. Motavali, *Exact Solutions of the Klein-Gordon Equation for the Rosen-Morse Type Potentials via Nikiforov-Uvarov Method*, (Faculty of Physics, University of Tabriz, Iran).
- [19] A. Suparmi, S. Cari dan H. Yuliani, *Ad. Phys. Theor. Appl. IISTE* **16**, 64 (2013).
- [20] H. Yuliani, *Analisis Spektrum Energi dan Fungsi Gelombang Persamaan Schrödinger Potensial Non-Sentral Shape Invariance Terdeformasi Menggunakan Metode Nikiforov-Uvarov*, (Tesis, Universitas Sebelas Maret, Surakarta, 2013).
- [21] R.L. Greene dan C. Aldrich, *Phys. Rev. A* **14**, 2363 (1976).